

## ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DOS AUTÔMATOS CELULARES EM PROBLEMAS DA MECÂNICA DAS ESTRUTURAS COM O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

*CONVERGENCE STUDY OF THE CELLULAR AUTOMATA TECHNIQUE APPLIED TO STRUCTURAL MECHANICS PROBLEMS WITH THE USE OF THE FINITE ELEMENT METHOD*

**Eduardo Nobre Lages<sup>1</sup>, Adeildo Soares Ramos Júnior<sup>2</sup>, Tiago Peixoto da Silva Lobo<sup>3</sup>, Rodrigo Vieira Cavalcanti<sup>4</sup>**

Universidade Federal de Alagoas, Centro de Tecnologia, Maceió, AL.

<sup>1</sup>Doutor em Engenharia Civil, Estruturas. E-mail: enl@lccv.ufal.br

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia Civil, Estruturas. E-mail: adramos@lccv.ufal.br

<sup>3</sup>Mestre em Física. E-mail: tiago.lobo@gmail.com

<sup>4</sup>Engenheiro de Petróleo. E-mail: rodrigo-wo@hotmail.com.

### RESUMO

Problemas da mecânica estrutural e dos sólidos podem apresentar comportamentos globais complexos e muitas vezes sem solução analítica. Métodos numéricos, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF), mostram-se como ferramentas tradicionais para estudo desses sistemas. O Autômato Celular (AC) é um modelo que se baseia na ideia de que o comportamento macroscópico de um sistema pode ser reproduzido por conjuntos menores com simples regras locais. Uma vez que essa abordagem parte de uma microescala para uma macroescala, esta técnica permite o estudo de efeitos microscópicos em objetos macroscópicos de maneira natural. Este trabalho estuda a convergência e o desempenho de uma técnica híbrida de AC com MEF a partir do desenvolvimento de um módulo computacional capaz de simular problemas de mecânica estrutural. Quatro estratégias de atualizações são estudadas, avaliadas quanto à convergência e comparadas, com diferentes ordenações e graus de discretização.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos, Autômato Celular, mecânica dos sólidos e estrutural.

### ABSTRACT

Structural and solid mechanics problems can show complex global behavior and, in many cases, without an analytical solution. Numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM), are traditionally used to study these systems. The Cellular Automata (CA) is a model based on the idea that the microscopic behavior of a system can be reproduced by smaller systems with simpler local rules. As this approach goes from a microscale to a macroscale, this technique enables the study of microscopic effects in macroscopic objects in a natural way. This paper studies the convergence of a hybrid technique of CA and FEM by developing a computational module capable of simulating solid- and structural-mechanics problems. Four update schemes are studied, evaluating the convergence, with different ordinations and degrees of discretization.

**Keywords:** Finite Elements Methods, Cellular Automata, solid and structural mechanics.

### 1 – INTRODUÇÃO

O estudo dos Autômatos Celulares (AC) tem atraído um grande interesse nos últimos anos devido à sua capacidade de gerar um amplo espectro de padrões comportamentais a partir de conjuntos relativamente simples de regras. Os Autômatos Celulares permitem resolver problemas que possuem uma complexidade alta de forma natural. Com o rápido desenvolvimento de técnicas computacionais, o AC tem sido amplamente utilizado em diversas áreas, como: mecânica dos sólidos (TATTING; GÜRDAL, 2000; FENG; PAN; ZHOU, 2006; PAN; FENG; HUDSON, 2009), mecânica dos fluidos (WOLFRAM, 1986), proliferação de células cancerígenas (MALLET; PILLIS, 2006; MARTINS, 2010), modelos de crescimento urbano (IRWIN; GEOGHEGAN, 2001), redes neurais (COPELLI *et al.*, 2002), espalhamento de epidemias (MELOTTI, 2009) e formação de padrões espaciais (SUZUDO, 2004). Ao se trabalhar em conjunto com outros métodos numéricos, os autômatos celulares são amplamente utilizados para

resolução de problemas de mecânica estrutural e dos sólidos (PSAKHIE *et al.*, 2001; FENG; PAN; ZHOU, 2006; PAN; FENG; HUDSON, 2009; SILVA *et al.*, 2009).

Os métodos tradicionais, tanto de análise e projeto estrutural quanto de análise de falhas, são normalmente baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF). Enquanto essa abordagem funciona bem para a maioria dos casos, ela tende a não escalar bem quando paralelizada para simulação de problemas mais complexos (SLOTTA *et al.*, 2002). Alguns trabalhos (GÜRDAL; TATTING, 2000; TATTING; GÜRDAL, 2000; SLOTTA *et al.*, 2002; SILVA *et al.*, 2009) utilizam um método híbrido entre autômatos celulares e MEF para contornar essa dificuldade. Estes trabalhos mostram que, a depender do tipo de autômato celular escolhido, as análises assemelham-se aos métodos de solução iterativa de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi (RUGGIERO; LOPES, 2008).

O método de solução de sistemas lineares de Gauss-Seidel é um método iterativo em que a ordem de solução das equações afeta a quantidade de iterações necessárias para

convergência do sistema linear (RUGGIERO; LOPES, 2008), o que leva a crer que modelos de autômato celular que se assemelhem a ele herdem a mesma característica. Neste artigo é apresentado um modelo híbrido entre autômatos celulares e elementos finitos de barra com quatro estratégias de atualização do autômato celular. Além disso, é analisada a convergência do método proposto ao se mudar a ordem de solução das células do autômato para as diferentes estratégias de atualização.

## 2 – MODELO TEÓRICO

Nesta seção são expostas as ideias do modelo teórico dos métodos usados neste trabalho: Autômato Celular e Método dos Elementos Finitos.

### 2.1 Autômato Celular

A história do Autômato Celular (AC) teve início em meados dos anos 1940 (KIER; SEYBOLD; CHENG, 2005; SCHIFF, 2008), quando a teoria dos autômatos celulares foi introduzida por Ulam e Von Neumann para fornecer um modelo que, por meio de simples regras, pudesse imitar complicados fenômenos naturais e artificiais para estudar processos de crescimento e autorreplicação (ULAM, 1952; VON NEUMANN, 1966). Nas décadas seguintes, os AC foram introduzidos e reutilizados para outros tipos de idealizações, como no estudo do funcionamento dos músculos cardíacos (WIENER; ROSENBLUETH, 1946), sistemas químicos não lineares que envolvem uma rede de reações acopladas com difusão espacial (GREENBERG; HASTINGS, 1978), mecânica estatística (WOLFRAM, 1983) e simulação de problemas da hidrodinâmica (SALEM; WOLFRAM, 1985).

No início da década de 1980 houve uma grande evolução no estudo do AC, devido à uma série de publicações do físico Stephen Wolfram (SCHIFF, 2008), em que foi realizado um estudo massivo sobre comportamento dos autômatos celulares que os colocou em evidência com os seus resultados e produziu algumas das imagens que hoje se tornaram ícones no campo. Além disso, ele foi responsável pela taxonomia de AC unidimensionais. Em Wolfram (2002) é mostrado um estudo de sistemas gerais simulados com autômatos celulares em que a complexidade do seu comportamento, induzida por regras elementares bastante simples, levou a presumir que mecanismos similares poderiam esclarecer fenômenos físicos complexos, e tem aplicabilidade em vários campos da ciência, como fratura em sólidos, termodinâmica, processadores de computador, turbulência de fluidos e criptografia.

Os Autômatos Celulares são idealizações matemáticas que podem ser usadas para a representação de sistemas físicos nos quais o espaço e o tempo são valores discretos, e as quantidades físicas assumem uma quantidade finita de valores discretos (WOLFRAM, 1983). É uma técnica que se baseia na ideia de que o comportamento global de um sistema pode ser reproduzido por conjuntos menores chamados de células, com simples regras locais, que, ao atuarem juntas, reproduzem o comportamento global

(WOLFRAM, 1984) em função de uma coleção de condições pré-definidas (GREMONINI; VICENTINI, 2008). Em outras palavras, o objetivo não é descrever um sistema complexo com equações complexas, mas deixar a complexidade emergir pela interação de indivíduos mais simples (MELOTTI, 2009).

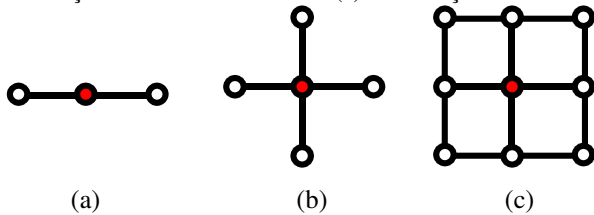
Segundo Wolfram (1983), um autômato celular consiste em uma grade regular uniforme (*grid* ou *uniform lattice*), usualmente infinita em sua extensão, com uma variável discreta em cada localidade chamada de célula. O estado de um autômato celular é completamente especificado pelos valores das variáveis em cada célula. Um AC evolui em passos de iteração ou de tempo discreto, em que cada passo de iteração consiste na atualização dos estados de todas as células de acordo com os estados de suas vizinhas. A vizinhança de uma célula é, normalmente, formada pela própria célula e todas as demais células localizadas nas suas adjacências imediatas. A atualização das variáveis em cada célula pode ser feita tanto simultaneamente quanto instantaneamente, a partir dos valores das variáveis da sua vizinhança no passo precedente e de acordo com um conjunto predefinido de regras locais. A atualização simultânea consiste na resolução de todas as células no passo de iteração  $t$ , na qual a atualização dos estados só ocorre ao final do passo de iteração. No contexto de resolução de sistemas lineares, essa atualização corresponde ao método de solução iterativa de Gauss-Jacobi (SLOTTA *et al.*, 2002). Quando as atualizações das células ocorrem ao final da resolução de cada uma, chamam-se de instantâneas, equivalente ao método de solução de sistemas lineares de Gauss-Seidel (SLOTTA *et al.*, 2002).

Na análise e projeto estrutural na mecânica dos sólidos, a intenção é descrever um equilíbrio estático de uma estrutura de acordo com um sistema de forças que atuam sobre ele (SLOTTA *et al.*, 2002), contudo, sabe-se que o AC é um método discreto no espaço e no tempo. Neste trabalho, o tempo não é simulado, e cada passo de iteração do AC é usado para propagar as tensões (locais) e as deformações por meio de uma estrutura que lhe permita atingir o estado de equilíbrio ao determinar simultaneamente a forma e/ou dimensões das células associadas com o estado de equilíbrio. Deste modo, os passos de iteração são repetidos até que o todo o sistema convirja para um estado global no qual não há nenhuma alteração significativa na estrutura para cada iteração subsequente, que corresponde a um estado de equilíbrio estático.

Um AC pode ser caracterizado por quatro fatores principais: geometria (ou grade) do meio base no qual estão as células, regras locais de transição, estados e vizinhança da célula (SARKAR, 2000). A geometria do AC é caracterizada por sua dimensão espacial, a forma de cada célula e como estas estão distribuídas (GREMONINI; VICENTINI, 2008). As regras locais de transição são funções que atualizam o estado de uma célula qualquer baseado nos estados dela própria e da sua vizinhança. As células de um AC assumem a cada passo um estado específico existente em um conjunto finito de possibilidades de estados, apesar de que Ostrov e Rucker (1996) usam estados contínuos para descrever autômatos celulares. No ponto de vista teórico, os estados das células do modelo

usados neste artigo têm estados contínuos, uma vez que elas podem assumir qualquer valor. Os dois principais tipos de vizinhança usualmente utilizados nos AC são as que levam em consideração as quatro e oito células adjacentes que se encontram em um *grid* (Figura 1), conhecidas como vizinhança de Von Neumann e de Moore, respectivamente (TATTING; GÜRDAL, 2000). Neste artigo, não se tem um *grid* pré-definido no qual as células serão localizadas, elas podem estar em qualquer lugar no plano e suas vizinhanças são determinadas de acordo com conectividades que são pré-definidas pelo modelo.

Figura 1 – Células vizinhas: (a) vizinhança em 1-D, (b) vizinhança de Von Neumann 2-D e (c) vizinhança de Moore 2-D



Uma das características fundamentais de autômatos celulares, que os tornam ferramentas computacionais de grande utilidade para os grandes sistemas, é o seu paralelismo inerente (SLOTTA *et al.*, 2002), ou seja, as células evoluem instantaneamente ou simultaneamente e a atualização dos estados das células são autônomas e independentes. Além disso, o AC tem a característica de localidade, pois a atualização do estado da célula depende somente do seu estado atual e do estado atual das células vizinhas (SLOTTA *et al.*, 2002) e de homogeneidade, porque as regras valem para todas as células.

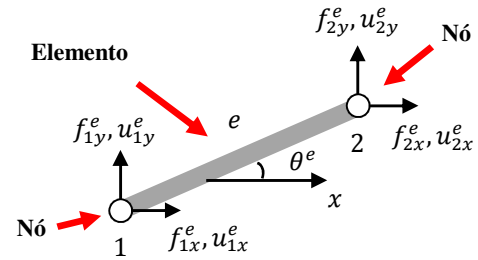
Diversos trabalhos aplicaram o modelo de Autômatos Celulares na resolução de problemas de mecânica estrutural e dos sólidos: Kita e Toyota (2000) e Hajela e Kim (2001) aplicaram AC para projetar estruturas elásticas em que as regras de atualização foram implementadas na fase de projeto, enquanto as técnicas tradicionais com MEF foram utilizadas na análise das estruturas. Gürdal e Tatting (2000) introduziram um novo esquema com AC em que a análise e projeto de estruturas de treliças são atualizadas ao mesmo tempo e mostrou que o esquema proposto é totalmente capaz de fazer uma modelagem linear e não linear dessas estruturas, e pode se estender à aplicação de otimização estrutural. Li, Feng e Zhou (2004) usaram a estrutura do modelo de AC para simular o processo de falha de rochas heterogêneas e do mecanismo de interação de fissuras. A metodologia do AC usada neste artigo baseia-se nos trabalhos de Slotta *et al.* (2002) e Feng, Pan e Zhou (2006).

## 2.2 Método dos Elementos Finitos

Neste trabalho são assumidas como unidades básicas do problema barras elásticas lineares, em regime de pequenos deslocamentos, rotações e deformações, perfeitamente articuladas nas extremidades. Estas barras são associadas a dois tipos básicos de entidades: nós e elementos (Figura 2). Nestes elementos de barras reduz-se o problema ao estudo das forças axiais, no qual o comportamento de um elemento

de barra é similar ao de molas elásticas lineares (FISH; BELYTCHKO, 2009).

Figura 2 – Entidades básicas (nós e elemento) de uma barra com os respectivos sistemas de coordenadas (forças e deslocamentos)



A formulação do Método dos Elementos Finitos apresentada neste trabalho baseia-se nas ideias expostas por Fish e Belytschko (2009) e por Ramos Júnior e Vieira (2000). Uma vez que os elementos de barras apresentam comportamentos similares aos das molas, é possível descrever a relação entre as forças nodais ( $\mathbf{f}^e$ ) e os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}^e$ ) correspondentes de um elemento  $e$  (Figura 2) por meio da Equação (1) de equilíbrio.

$$\mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (1)$$

Em que: as forças nodais são relacionadas com os deslocamentos nodais por meio da matriz de rigidez do elemento ( $\mathbf{k}^e$ ), conforme Equação (2).

$$\mathbf{k}^e = \frac{A^e \cdot E^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & c s & -c^2 & -c s \\ c s & s^2 & -c s & -s^2 \\ -c^2 & -c s & c^2 & c s \\ -c s & -s^2 & c s & s^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Em que:  $E^e$  representa o módulo de Young ou de elasticidade longitudinal do material do elemento  $e$ ,  $A^e$  a área da seção transversal, e  $l^e$  o comprimento indeformado do elemento. Ainda na Equação 2,  $c$  e  $s$  representam  $\cos \theta^e$  e  $\sin \theta^e$ , respectivamente.

As matrizes e os vetores de todos os elementos que compõem um modelo estrutural são organizados em um sistema de equações lineares único, representativo do equilíbrio global da estrutura, na forma da Equação (3).

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

Em que:  $\mathbf{f}$  é o vetor global de forças nodais do sistema,  $\mathbf{u}$  é o vetor global de deslocamentos nodais do sistema e  $\mathbf{K}$  é a matriz global de rigidez da estrutura.

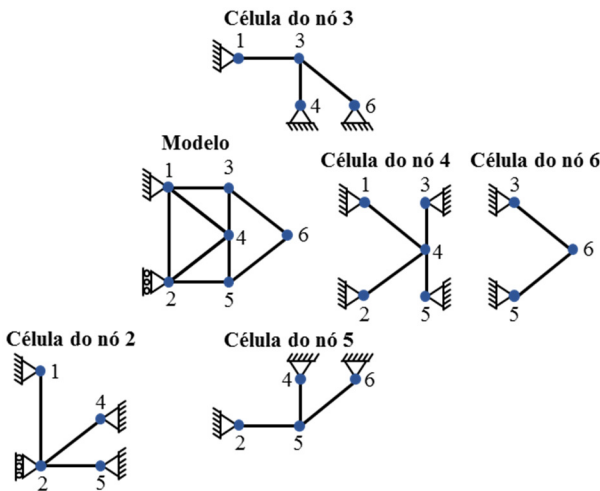
Comumente, o sistema de equações em pauta é resolvido via algum método clássico direto, a exemplo do método da eliminação de Gauss (RUGGIERO; LOPES, 2008). É importante salientar que, em cada direção do sistema de referência do nó, ou a força externa ou o deslocamento é conhecido, sendo a outra informação uma incógnita do sistema.

## 3 – INTEGRAÇÃO DOS MÉTODOS E TÉCNICAS DE ATUALIZAÇÕES

Como mencionado, o AC é composto de uma estrutura (geometria do meio base no qual estão as células), regras

locais de transição, estados e vizinhança da célula. Portanto, faz-se necessário definir esses componentes antes de prosseguir a análise. Como componente básico e unidade mínima do problema, define-se uma célula como o conjunto de todos os elementos finitos de barra ligados a um nó  $n_i$  que tenha ao menos um grau de liberdade livre (FENG; PAN; ZHOU, 2006), na qual todos os demais nós  $n_{j \neq i}$ , pertencentes a esta célula, são considerados apoiados durante a resolução da célula (SLOTTA *et al.*, 2002), conforme pode ser observado na Figura 3. A vizinhança da célula em questão é formada por todos os outros nós  $n_{j \neq i}$  e barras que a formam.

Figura 3 – Modelo de treliça e as células associadas



O formato da célula reflete diretamente a dimensão do problema a ser estudado (FENG; PAN; ZHOU, 2006). Neste trabalho, apresenta-se a técnica de autômatos celulares para a solução de arranjos estruturais planos com elementos de barras retas perfeitamente articuladas nas extremidades, assim as células podem adquirir formatos diversos dependentes da topologia da estrutura. A Figura 4 mostra alguns formatos das células 1-D e 2-D: linear, retangular e triangular.

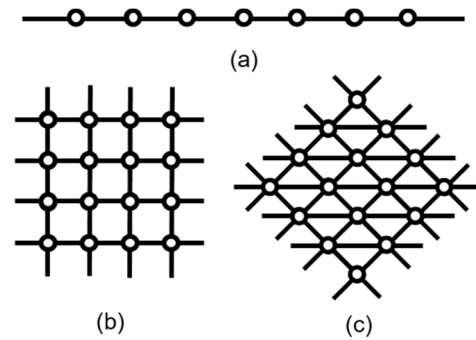
No problema estrutural plano em pauta, o estado  $\phi_C$ , de uma célula  $C$ , pode ser escrito como uma lista das variáveis que representam o sistema físico discreto. Desta forma, deslocamentos, propriedades materiais e forças estão definidas para cada célula, como na Equação (4).

$$\phi_C = \{ \{E, A, l\}_i, \{f_x, f_y\}_n, \{u_x, u_y\}_n \}, \quad \forall i, n \in C \quad (4)$$

Em que: subíndices  $i$  e  $n$  indicam variáveis que pertencem ao elemento  $i$  e ao nó  $n$ , respectivamente.

Cada célula é resolvida individualmente pelo uso do MEF, de modo que a regra de transição local é a Equação (3) de equilíbrio, e esta é função da vizinhança da célula. Durante os passos, a informação da evolução da célula é passada para as outras de acordo com uma regra de atualização pré-definida e os valores das variáveis em questão na iteração  $t + 1$  são obtidos com base nos valores de estado dos vizinhos já conhecidos do momento  $t$ .

Figura 4 – Estrutura ou geometria das células: (a) células 1-D, (b) células retangulares em 2-D (c) Células triangulares em 2-D



Nota-se, então, que o problema se resume à resolução de sistemas de equações lineares, obtidos da Equação (3) de equilíbrio. As células podem ser todas atualizadas simultaneamente, o que corresponde a uma iteração de Gauss-Jacobi, ou sequencialmente, o que corresponde a uma iteração de Gauss-Seidel (ABDALLA; GÜRDAL, 2002). São então desenvolvidas quatro regras de atualização de informações: Força com MEF (FMEF), Força Atualizada com MEF (FAMEF), Deslocamento com MEF (DMEF) e Deslocamento Atualizado com MEF (DAMEF). As técnicas obtidas são equivalentes a métodos de solução iterativos já consolidados, nas quais aquelas ditas atualizadas (FAMEF e DAMEF) se assemelham ao método de Gauss-Seidel e as demais ao de Gauss-Jacobi. Quando em todas as células do modelo o nó associado possui apenas uma deslocabilidade livre, neste caso as estratégias de autômatos celulares se equivalem aos processos clássicos de atualização dos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel. Quando o nó associado à célula possui mais de uma deslocabilidade livre, neste caso têm-se equivalências a generalizações dos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel, como proposto por Salkuyeh (2007).

### 3.1 Força com MEF (FMEF)

Nesta estratégia, a informação repassada entre as células é a força, em que se usa a sua transferência por meio das células para encontrar o deslocamento sofrido por cada nó. A cada iteração, as células são resolvidas individualmente a partir da Equação (3), e as reações de apoio são então combinadas com as forças externas na próxima iteração. A atualização das forças do sistema ocorre apenas ao final de cada iteração. Na Figura 5 tem-se um fluxograma das etapas correspondentes a esta estratégia de atualização.

Um exemplo ilustrativo pode ser visto na Figura 6. A resolução do problema ocorre de acordo com a ordem das células. Como a informação trocada entre as células é a força, e ela é prescrita no nó livre, em um passo de iteração  $t$  qualquer, resolve-se inicialmente o sistema linear da Equação (3) da Célula 1 (Figura 6-b), e obtêm-se os valores das reações de apoio e dos deslocamentos do nó livre (estados da célula). As reações de apoio são armazenadas e usadas como forças externas do nó em questão na próxima iteração. Em seguida, na mesma iteração, resolve-se a célula 2 (Figura 6-c) da mesma maneira. Para o problema da Figura 6, observam-se, na iteração  $t$ , as seguintes equações de

recorrência para as forças  $F_t$  e  $W_t$  nos nós livres das Células 1 e 2, respectivamente:

$$F_t = W_{t-1}, \quad (5)$$

$$W_t = P + F_{t-1}/2 \quad (6)$$

Em que são utilizadas as forças nodais da iteração anterior, ou seja,  $t - 1$ .

Figura 5 – Fluxograma da estratégia FMEF

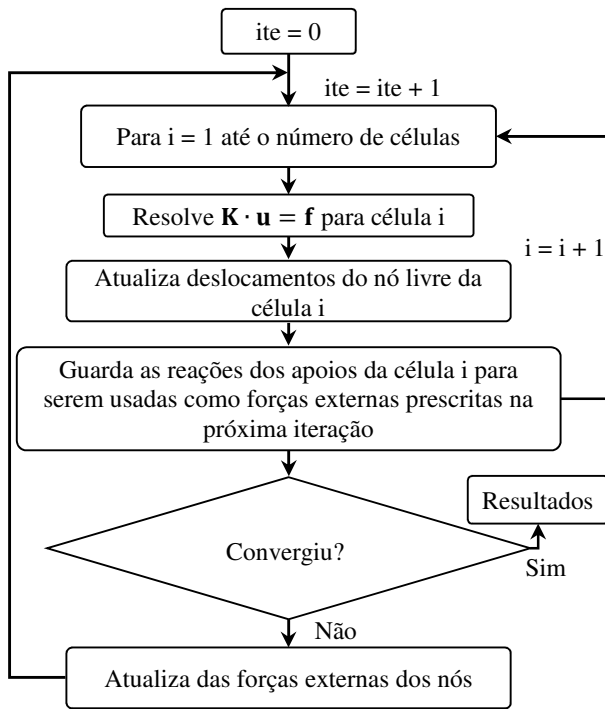
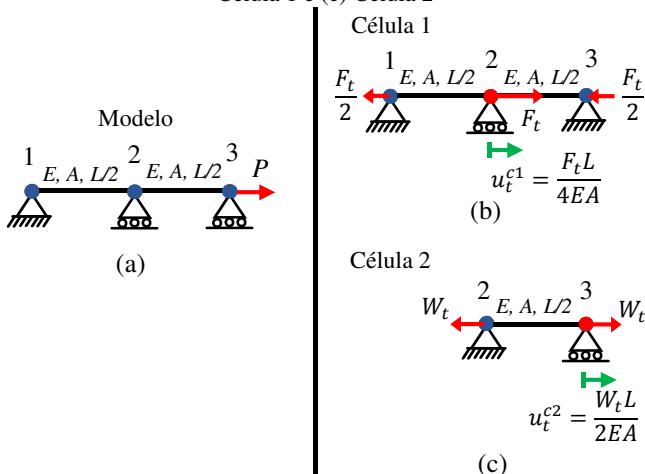


Figura 6 – Problema com elementos de barras que utiliza transferência de forças por meio das células. (a) Modelo, (b) Célula 1 e (c) Célula 2

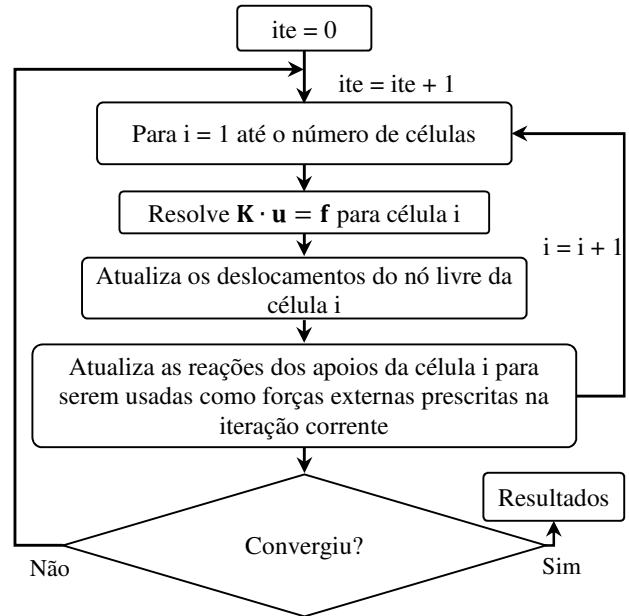


### 3.2 Força Atualizada com MEF (FAMEF)

A força atualizada com MEF é análoga à estratégia anterior, em que se usa a transferência de forças por meio das células para encontrar o deslocamento sofrido por cada nó. Contudo, as reações de apoio são combinadas e repassadas como forças externas no próprio passo de iteração à medida

que cada célula é resolvida, ou seja, elas são atualizadas ao final da resolução de cada célula e não ao final da iteração. Na Figura 7 tem-se um fluxograma das etapas correspondentes a esta estratégia de atualização.

Figura 7 – Fluxograma da estratégia FAMEF



Para o mesmo problema usado anteriormente, em um passo de iteração  $t$  qualquer, resolve-se primeiro a Célula 1 (Figura 7-b) a partir da Equação (3) e acham-se os valores das reações de apoio e dos deslocamentos do nó livre. As reações de apoio são atualizadas e usadas como forças externas do nó em questão na iteração  $t$ . Em seguida, na mesma iteração, resolve-se a Célula 2 (Figura 7-c) da mesma maneira, mas se considera a força externa que foi atualizada devido à resolução da Célula 1. Como a atualização ocorre sequencialmente na própria iteração, de acordo com a ordenação das células do AC, esta estratégia de atualização fica em função da ordem que as células são resolvidas. Na iteração  $t$ , as forças  $F_t$  e  $W_t$  nos nós livres das Células 1 e 2 são dadas respectivamente por:

$$F_t = W_{t-1}, \quad (7)$$

$$W_t = P + F_t/2 \quad (8)$$

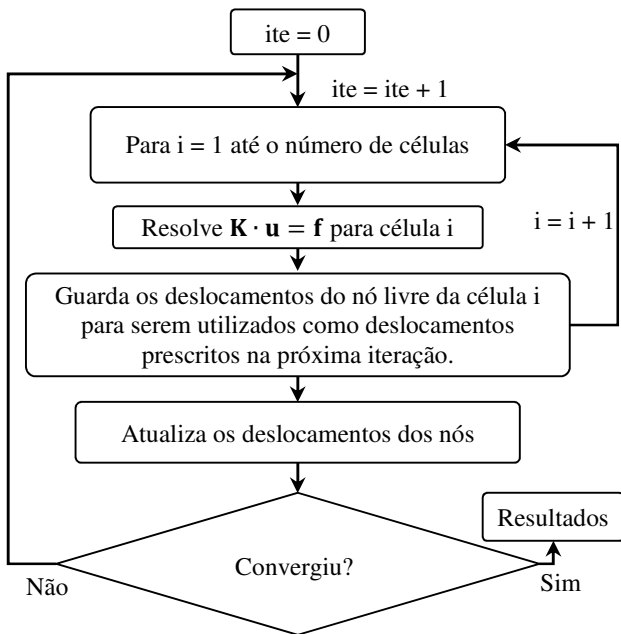
No nó livre da Célula 2 observa-se que é empregada a nova força externa, que é atualizada na resolução da Célula 1.

### 3.3 Deslocamento com MEF (DMEF)

Diferentemente das estratégias anteriores, nesta a informação transferida entre as células é o deslocamento. Em cada iteração as células são resolvidas de forma independente com MEF e os deslocamentos dos nós livres das células são transferidos como recalques de apoio na próxima iteração. A atualização dos deslocamentos do sistema ocorre ao final de cada iteração. Na Figura 8 tem-se

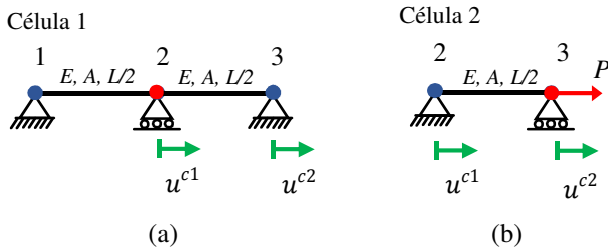
um fluxograma das etapas correspondentes a esta estratégia de atualização.

Figura 8 – Fluxograma da estratégia DMEF



Uma aplicação desta estratégia pode ser observada na Figura 9, na qual a resolução do arranjo da Figura 6-a acontece de acordo com a ordem das células.

Figura 9 – Problema da Figura 6-a em que se aplica a transferência de deslocamento por meio das células ao final de cada iteração. (a) Célula 1 e (b) Célula 2



Agora a informação passada entre as células é o deslocamento. Em um passo de iteração  $t$ , resolve-se inicialmente o sistema linear inerente à Célula 1 (Figura 9-a), resultante da Equação (3), e encontram-se os valores dos deslocamentos do nó livre (estados da célula). Esses são armazenados e usados como recalques de apoio do nó em questão na iteração  $t + 1$ . Em seguida, ainda no passo de iteração  $t$ , resolve-se a Célula 2 (Figura 9-b) com os estados da iteração interior, da mesma maneira feita com a Célula 1. Ao final da resolução de todas as células, atualiza-se o sistema. Para as células da Figura 8, notam-se, ao resolvê-las, os seguintes padrões nos valores dos deslocamentos do nó 2, referente à Célula 1 ( $u_t^{c1}$ ), e do nó 3, referente à Célula 2 ( $u_t^{c2}$ ), em uma iteração  $t$  qualquer:

$$u_t^{c1} = u_{t-1}^{c2}/2, \tag{9}$$

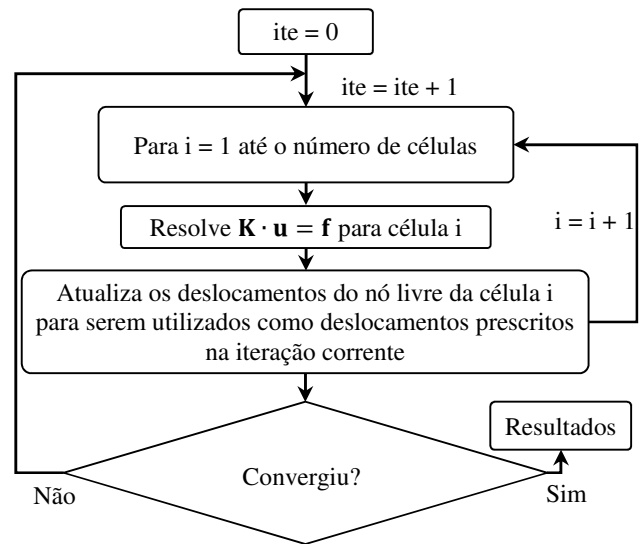
$$u_t^{c2} = u_{t-1}^{c1} + PL/(2EA) \tag{10}$$

Em que se usam os estados anteriores na resolução do problema.

### 3.4 Deslocamento Atualizado com MEF (DAMEF)

Nesta estratégia é utilizado o mesmo princípio da estratégia anterior. Em cada iteração todas as células são resolvidas gradativamente, porém os deslocamentos dos nós livres das células são transferidos como recalques de apoio na própria iteração, em outras palavras, a transferência (atualização) de deslocamentos ocorre ao final da resolução individual de cada célula e não ao final do passo de iteração. Na Figura 10 tem-se um fluxograma das etapas correspondentes a esta estratégia de atualização.

Figura 10 – Fluxograma da estratégia DAMEF



Para as células da Figura 9, em uma iteração  $t$ , resolve-se primeiro a célula 1 a partir dos estados de  $t - 1$  e atualiza-se o sistema com o novo estado. Ao resolver a célula 2, ao invés de usar os estados do passo de iteração  $t - 1$ , usam-se os deslocamentos da célula 1 que já foram resolvidas durante o passo de iteração atual  $t$ . Dessa forma, este tipo de atualização torna-se dependente da ordem de resolução das células do AC. Notam-se as seguintes equações de recorrências para os deslocamentos dos nós 2 e 3:

$$u_t^{c1} = u_{t-1}^{c2}/2, \tag{11}$$

$$u_t^{c2} = u_t^{c1} + PL/(2EA) \tag{12}$$

Em que:  $u_t^{c1}$  é o deslocamento do nó 2, relacionado com a célula 1, e  $u_t^{c2}$  é o deslocamento do nó 3, relacionado com a célula 2.

## 4 – MÓDULO COMPUTACIONAL

Foi desenvolvido, no ambiente MATLAB®, um módulo computacional que utiliza a técnica híbrida de autômato celular e MEF, na qual as células são geradas a partir de uma

malha de elementos de barra. Cada célula é resolvida individualmente e uma estratégia de atualização é empregada para que os novos valores das variáveis de estado sejam corrigidos, procedimento que se repete até o sistema entrar em equilíbrio.

Apesar de serem apresentadas quatro diferentes estratégias de atualização, somente duas são independentes para o modelo (Equação 4) utilizado neste trabalho. Como a relação entre força e deslocamento é linear, os resultados obtidos são iguais, seja utilizada ou a força ou o deslocamento para atualizar as células. Desta forma, tem-se que, para o caso linear, os estados das células ao final de uma iteração são os mesmos para o par de estratégias FMEF-DMEF, assim como para o par FAMEF-DAMEF. Registra-se que, para relações não lineares entre força e deslocamento, esse fato se mantém desde que essas sejam descritas por funções bijetoras.

Como se trabalha com estratégias iterativas de solução, precisa-se de um critério de parada para a simulação. O critério de parada utilizado neste trabalho busca garantir que a mudança do deslocamento seja invariante à escala. Diz-se que a sequência de análise converge quando todas as variáveis de interesse possuem valores muito próximos em iterações subsequentes. Ao considerar  $u_t$  o vetor deslocamento na iteração atual e  $u_{t-1}$  o deslocamento na iteração anterior, a estratégia converge quando ocorre, para o modelo como um todo, conforme Equação (13).

$$\|u_t - u_{t-1}\| \leq p \|u_{t-1}\| \quad (13)$$

Em que:  $p$  é o parâmetro que mede a mudança requerida do deslocamento e  $\| \cdot \|$  corresponde à norma euclidiana de um vetor.

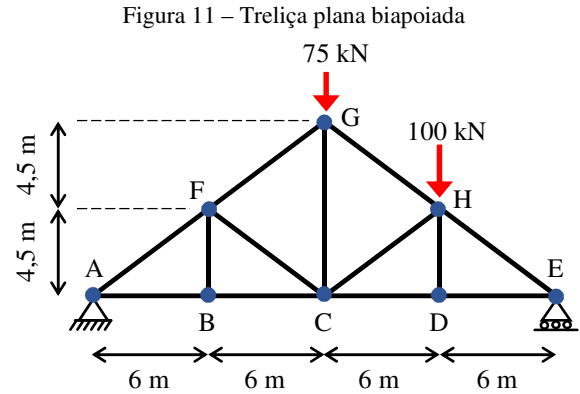
Os arquivos MATLAB® correspondentes às funções com as implementações das estratégias de atualização DMEF e DAMEF, bem como os exemplos numéricos apresentados adiante, encontram-se disponíveis no repositório público: <http://loi.lccv.ufal.br/art-acmef-cieng> para baixar e uso. Busca-se, com isso, seguir os preceitos da pesquisa reproduzível, do inglês *reproducible research* (e.g., VANDEWALLE; KOVACEVIC; VETTERLI, 2009).

## 5 – RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados de análise de dois modelos estruturais com uso do módulo computacional implantado em MATLAB®. Em função da igualdade de resultados por pares de estratégias FMEF-DMEF e FAMEF-DAMEF são trabalhados estes exemplos de aplicação apenas com as estratégias DMEF e DAMEF.

### 5.1 Treliça plana

Considera-se a treliça plana biapoada representada na Figura 11, adaptada de Kassimali (2016).



Emprega-se o mesmo material em todas as barras do modelo, sendo o módulo de Young  $E$  igual a  $200 \text{ GPa}$ . Quanto à seção transversal, as barras horizontais, vertical central e inclinadas externas possuem área igual a  $3.000 \text{ mm}^2$ , e as restantes possuem área igual a  $2.000 \text{ mm}^2$ . Todas as barras possuem eixos retos e encontram-se perfeitamente rotuladas nas extremidades.

Calcula-se a solução analítica de referência para os deslocamentos dos nós do modelo fazendo-se uso do programa *Ftool* (Martha, 2015). Na Tabela 1 estão listados os deslocamentos horizontais e verticais dos nós do modelo.

Tabela 1 – Solução analítica da treliça plana

Nó	Deslocamentos (mm)	
	Horizontal	Vertical
A	0,000	0,000
B	0,833	-6,731
C	1,667	-9,069
D	3,167	-9,790
E	4,667	0,000
F	3,421	-6,731
G	2,984	-8,319
H	0,254	-9,790

Avalia-se o desempenho das estratégias DMEF e DAMEF fixando-se o parâmetro de convergência  $p$ , presente na Equação (13), igual a  $0,0005$ . O modelo possui 7 células associadas aos nós B, C, D, E, F, G e H, que possuem pelo menos um deslocamento livre ao longo das direções horizontal e vertical. Neste estudo inicial, durante cada iteração, as células são avaliadas seguindo-se a sequência desses nós associados.

As estratégias DMEF e DAMEF necessitam, respectivamente, de 168 e 100 iterações para atingir a convergência. Em um computador com as seguintes características: Windows 10 Pro 64-bits, MATLAB® R2014b, Intel® Core™ i7-4810MQ CPU @ 2.80 GHz e 16GB RAM, o tempo médio de processamento para a geração das células neste modelo é na ordem de milissegundo, enquanto que o tempo médio de processamento das iterações das estratégias DMEF e DAMEF é na ordem de centésimo de segundo.

Nas Tabelas 2 e 3 estão listados os deslocamentos nodais para essas duas estratégias, sendo informados ainda os respectivos erros absolutos em relação à solução analítica. A ordem de avaliação das células existentes neste modelo obedece à ordem alfabética de nomeação dos nós

que apresentam alguma deslocabilidade. Assim, são avaliadas, em sequência, as células associadas aos nós B, C, D, E, F, G e H.

Tabela 2 – Solução DMEF da treliça plana

Nó	Deslocamentos (mm)		Erros absolutos (mm)	
	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
A	0,000	0,000	0,000	0,000
B	0,797	-6,559	0,036	0,172
C	1,596	-8,892	0,071	0,177
D	3,068	-9,626	0,099	0,164
E	4,543	0,000	0,124	0,000
F	3,325	-6,563	0,096	0,168
G	2,917	-8,161	0,067	0,158
H	0,211	-9,630	0,043	0,160

Tabela 3 – Solução DAMEF da treliça plana

Nó	Deslocamentos (mm)		Erros absolutos (mm)	
	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
A	0,000	0,000	0,000	0,000
B	0,814	-6,643	0,019	0,088
C	1,630	-8,980	0,037	0,089
D	3,116	-9,709	0,051	0,081
E	4,605	0,000	0,062	0,000
F	3,373	-6,647	0,048	0,084
G	2,951	-8,241	0,033	0,078
H	0,233	-9,713	0,021	0,077

Os resultados apresentados nas Tabelas 2 e 3 demonstram a qualidade das respostas frente à solução analítica (Tabela 1), sendo cometidos erros absolutos máximos 0,177 mm e 0,089 mm, respectivamente, para as estratégias DMEF e DAMEF.

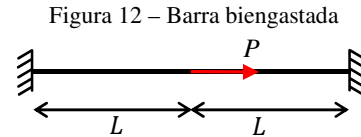
Em segundo momento de análise deste modelo, verifica-se a influência da ordem de avaliação das células ao longo das iterações no desempenho das estratégias DMEF e DAMEF. Como o modelo possui 7 células, existem  $7! = 5.040$  ordens de avaliação diferentes.

Para a estratégia DMEF, em todas as ordens de avaliação consideradas, a convergência é atingida com 168 iterações, mantendo-se sempre o erro absoluto máximo de 0,177 mm. Para a estratégia DAMEF, a convergência é atingida com um número de iterações variando entre 99 e 101, com erros absolutos máximos variando entre 0,084 e 0,093 mm.

### 5.2 Barra biengastada

Dada a possibilidade de variação no número de iterações para a convergência da estratégia DAMEF em função da ordem de avaliação das células, como apontado no exemplo anterior, mesmo que bem sutil, neste exemplo investiga-se esse efeito em um modelo estrutural que possibilita o crescimento do número de células e, conseqüentemente, o número de ordens de avaliação das mesmas.

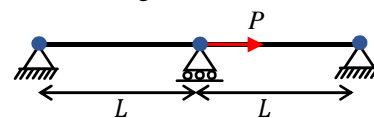
O modelo estrutural deste exemplo corresponde a uma barra prismática e homogênea, sob condição de engastamento nas extremidades e submetida a uma carga concentrada axial central, conforme esquema apresentado na Figura 12.



Trata-se de um problema básico de estruturas, cuja solução analítica leva a um deslocamento axial do ponto central igual a  $PL/2EA$ , no sentido da carga aplicada, em que  $E$  é o módulo de Young do material empregado na confecção da barra e  $A$  é a área da seção transversal da mesma. A partir deste movimento do ponto central, desenvolvem-se campos de deslocamentos axiais lineares para cada trecho de comprimento  $L$ , chegando-se a valores nulos nas extremidades engastadas.

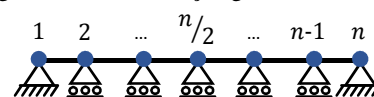
Essa solução analítica pode ser reproduzida empregando-se apenas dois elementos de barras considerados neste trabalho. Para isso, restringem-se os deslocamentos horizontal e vertical nos nós das extremidades do modelo e, para garantir a estabilidade do mesmo, restringe-se o deslocamento vertical do nó central, no qual se aplica a carga axial  $P$  (Figura 13).

Figura 13 – Modelagem básica da barra biengastada



Para avaliar o desempenho da estratégia DAMEF, e conseqüentemente a FAMEF, quanto ao número de iterações frente à mudança na ordem de avaliação das células, trabalha-se o problema em pauta considerando-se crescentes níveis de discretização dos trechos da barra, correspondendo a modelos com 11, 13, 15, 17 e 19 nós (Figura 14). Para avaliar a influência da ordem de avaliação das células, este modelo com  $n$  nós possui  $n - 2$  células e possibilita  $(n - 2)!$  ordens diferentes de avaliação. Essas discretizações resultam em quantidades de ordens de avaliação das células inexequíveis computacionalmente. Por exemplo, a primeira das discretizações, com 11 nós, possui 362.880 ordens distintas de avaliação, que cresce significativamente para mais de 355 trilhões de ordens para a discretização com 19 nós.

Figura 14 – Discretização genérica com  $n$  nós



Devido às quantidades exageradas de ordens de avaliação das células tratou-se o número de iterações para convergência da solução da estratégia DAMEF como uma resposta aleatória, associando indicadores estatísticos, como a medida de tendência central, a média, e as medidas de dispersão, o desvio padrão e o desvio padrão relativo, sendo esse último indicador dado pela razão percentual entre o desvio padrão e a média (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

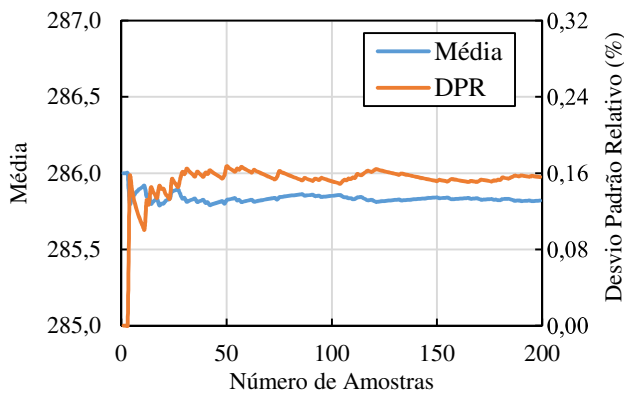
Para que a velocidade de convergência independa da ordem de avaliação das células, deve-se obter o desvio



padrão relativo próximo de zero. Isso implica que, para qualquer ordem escolhida, tem-se um número de iterações muito próximo do valor médio, não alterando a eficiência da estratégia, do ponto de vista computacional.

Buscando-se identificar se há um número mínimo de amostras de ordens de avaliação das células que garanta a estabilidade dos indicadores estatísticos, para a discretização mais refinada, de 19 nós, avalia-se a evolução desses indicadores à medida que novas amostras são consideradas. A Figura 15 mostra a evolução da média do número de iterações e o respectivo desvio padrão relativo (DPR).

Figura 15 – Evolução dos indicadores estatísticos em função do aumento do número de amostras analisadas



A evolução dos indicadores estatísticos apresentados na Figura 15 permite assumir que, neste problema, 100 amostras aleatórias de ordens de avaliação das células são suficientes para representar valores de referências para o número de iterações para se atingir a convergência da estratégia DAMEF, não havendo mais modificações significativas na média e no desvio padrão relativo ao adicionar novas amostras.

Para cada nível de discretização da barra, criam-se então 100 amostras aleatórias de ordens de avaliação das células para se estudar a variação no número de iterações para se atingir a convergência da estratégia DAMEF. Na Tabela 4 apresentam-se, para as várias discretizações definidas neste exemplo, os valores médios do número de iterações, do desvio padrão (DR) e do desvio padrão relativo (DPR).

Tabela 4 – Indicadores estatísticos em função do nível de discretização

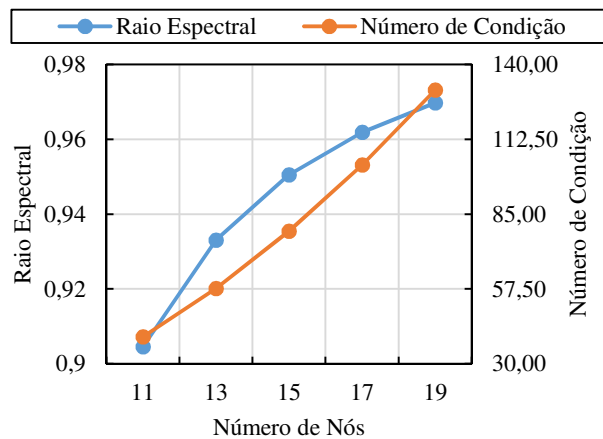
Número de nós	Média de iterações	DP	DPR (%)
11	99,93	0,29	0,2934
13	138,74	0,46	0,3339
15	182,77	0,47	0,2562
17	231,91	0,49	0,2131
19	285,85	0,44	0,1522

A partir dos resultados apresentados na Tabela 4, em função dos baixos valores do desvio padrão e do desvio padrão relativo, é possível inferir que a velocidades de convergência, para o problema tratado neste exemplo, independe da ordem de avaliação das células, apesar do elevado número de ordens de avaliação que podem existir,

inclusive em discretizações que envolvam poucos nós que tenham alguma deslocabilidade.

Com relação ao crescente número médio de iterações à medida que se aumenta a discretização (Tabela 4), isso se deve ao fato de que, para este modelo, o raio espectral da matriz de iteração se aproxima cada vez mais do valor unitário (Figura 16), o que acarreta em uma diminuição da velocidade de convergência dos métodos iterativos, em geral (STRANG, 2006). Por sua vez, para os métodos diretos de solução, a exemplo do método da eliminação de Gauss (RUGGIERO; LOPES, 2008), esses modelos apresentam um aumento do número de condição (STRANG, 2006) da matriz dos coeficientes do sistema de equações resultante (Figura 16), o que exige estratégias de controle dos erros de arredondamento, a exemplo das estratégias de pivoteamento parcial e completo (RUGGIERO; LOPES, 2008), erros esses inerentes à álgebra computacional de ponto flutuante.

Figura 16 – Raio espectral e número de condição em função do número de nós da discretização



Por fim, registra-se que todas as discussões e indicadores numéricos apresentados neste exemplo são independentes dos valores numéricos dos parâmetros do modelo. No entanto, computacionalmente exigem-se valores numéricos para os mesmos, sendo atribuídos:  $L$  igual a  $2\text{ m}$ ,  $A$  igual a  $0,01\text{ m}^2$ ,  $E$  igual a  $200\text{ GPa}$  e  $P$  igual a  $20\text{ MN}$ , cuja solução analítica para o deslocamento axial do nó central é de  $1\text{ cm}$ . Com relação à tolerância de convergência da estratégia DAMEF,  $p$  da Equação (13), adotou-se o valor  $0,000005$ , que aumenta a precisão dos resultados numéricos frente aos resultados analíticos.

## CONCLUSÕES

O método híbrido entre Autômatos Celulares e Método dos Elementos Finitos se mostra uma alternativa de técnica iterativa para resoluções de diversos problemas discretos, principalmente no que diz respeito à mecânica estrutural e dos sólidos.

Neste trabalho foram apresentadas e testadas quatro estratégias de atualizações das variáveis de estado, porém as

estratégias de deslocamento atualizado (DAMEF) e de força atualizada (FAMEF) foram as que apresentaram melhor desempenho computacional, com um menor número de iterações para atingir os mesmos resultados das outras duas estratégias (DMEF e FMEF).

A partir dos exemplos apresentados, constatou-se que a ordem de avaliação das células não influencia significativamente na quantidade de iterações necessárias para a convergência do problema. Sendo assim, não se recomendada a busca pela melhor ordem de avaliação, até porque a quantidade de ordens cresce fatorialmente com o número de células do modelo.

Uma análise comparativa revela que as fórmulas de recorrência obtidas com as regras dos autômatos celulares se assemelham às técnicas tradicionais e generalizadas de solução iterativa de sistemas de equações lineares, como os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Isso mostra que pré-condicionadores podem ser aplicados ao sistema de equações inicial para otimizar a velocidade convergência do problema, com potencial extensão dessa metodologia para problemas não lineares.

Os arquivos MATLAB® das implementações das estratégias de atualização, bem como os exemplos numéricos apresentados neste trabalho, encontram-se disponíveis no repositório público: <http://loi.lccv.ufal.br/art-acmef-cieng> para baixar e uso.

## REFERÊNCIAS

- ABDALLA, M. M.; GÜRDAL, Z. Structural design using optimality based cellular automata. In: **Proceedings of 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, AIAA Paper 2002-1676, Denver, CO, 2002. <http://dx.doi.org/10.2514/6.2002-1676>.
- COPELLI, M.; ROQUE, A. C.; OLIVEIRA, R. F.; KINOCHI, O. Physics of psychophysics: Stevens and Weber-Fechner laws are transfer functions of excitable media. **Physical Review E**, v. 65, 060901(R), p. 1-4, 2002.
- FENG, X.-T.; PAN, P.-Z.; ZHOU, H. Simulation of the rock microfracturing process under uniaxial compression using an elasto-plastic cellular automaton. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 43, n. 7, p. 1091-1108, 2006. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2006.02.006>.
- FISH, J., BELYTSCHKO, T. **Um primeiro curso em elementos finitos**. Editora LTC, 2009.
- GREENBERG, J. M.; HASTINGS, S. P. Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 515-523, 1978. <http://dx.doi.org/10.1137/0134040>.
- GREMONINI, L.; VICENTINI, E. Autômatos celulares: revisão bibliográfica e exemplos de implementações. **Revista Eletrônica Lato Sensu – UNICENTRO**. 6ª ed., 2008. ISSN: 1980-6116.
- GÜRDAL, Z.; TATTING, B. Cellular automata for design of truss structures with linear and nonlinear response. In: **Proceedings of the 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit**, AIAA Paper 2000-1580, Atlanta, GA, USA, 2000. <http://dx.doi.org/10.2514/6.2000-1580>.
- HAIJELA, P.; KIM, B. On the use of energy minimization for CA based analysis in elasticity. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 23, p. 24-33, 2001. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-001-0162-2>.
- IRWIN, E.; GEOGHEGAN, J. Theory, data, methods: developing spatially explicit economic models of land use change. **Agriculture, Ecosystems and Environment**, v. 85, n. 1-3, p. 7-24, 2001. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8809\(01\)00200-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8809(01)00200-6).
- KASSIMALI, A. **Análise Estrutural**. CENGAGE Learning, 2016.
- KIER, L. B.; SEYBOLD, P. G.; CHENG, C.-K. **Modeling chemical systems using cellular automata**. Springer, 2005.
- KITA, E.; TOYOTA, T. Structural design using cellular automata. **Structural and Multidisciplinary Analysis and Optimization**, v. 19, n. 1, p. 64-73, 2000. <http://dx.doi.org/10.1007/s001580050086>.
- LI, M.-T.; FENG, X.-T.; ZHOU, H. Cellular automata simulation of the interaction mechanism of two cracks in rock under uniaxial compression. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 41, s. 1, p. 484-489, 2004.
- MALLET, D. G.; PILLIS, L. G. A cellular automata model of tumor-immune system interactions. **Journal of Theoretical Biology**, v. 239, n. 3, p. 334-350, 2006. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.08.002>.
- MARTHA, L. F. C. R. Ftool – Two-Dimensional Frame Analysis Tool – Versão Educacional 3.01, 2015. Disponível em: <<https://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/ftool>>. Acesso em: 24 jul. 2016.
- MARTINS, C. C. **Autômato celular aplicado no crescimento de câncer**. 2010. 78f. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, 2010.
- MELOTTI, G. **Aplicação de autômatos celulares em sistemas complexos: um estudo de caso em espalhamento de epidemias**. 2009. 116f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2009.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. 6th edition. John Wiley & Sons, 2014.
- OSTROV, D. N.; RUCKER, R. Continuous-valued cellular automata for nonlinear wave equations. **Complex Systems**, v. 10, p. 91-119, 1996.
- PAN, P.-Z.; FENG, X.-T.; HUDSON, J. A. Study of failure and scale effects in rocks under uniaxial compression using 3D cellular automata. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 46, p. 674-685, 2009. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2008.11.001>.
- PSAKHIE, S. G.; HORIE, Y.; OSTERMEYER, G. P.; KOROSTELEV, S. Y.; SMOLIN, A. Y.; SHILKO, E. V.; DMITRIEV, A. I.; BLATNIK, S.; SPEGEL, M.; ZAVSEK, S. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure. **Theoretical and**

- Applied Fracture Mechanics**, v. 37, n. 1-3, p. 311-334, 2001. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8442\(01\)00079-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8442(01)00079-9).
- RAMOS JÚNIOR, A. S.; VIEIRA, L. C. L. Formulação matemática e implementação computacional no MATLAB de modelos físicos discretos. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, XXVIII, 2000, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: ABENGE, 2000.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 2008.
- SALEM, J. B.; WOLFRAM, S. **Thermodynamics and hydrodynamics with cellular automata**. Thinking Machines Corporation technical report, 1985.
- SALKUYEH, D. K. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear System of Equations. **Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities**, v. 16, n. 2, p. 164-170, 2007.
- SARKAR, P. A brief history of cellular automata. **ACM Computing Surveys**, v. 32, n. 1, p. 80-107, 2000. <http://dx.doi.org/10.1145/349194.349202>.
- SCHIFF, J. L. **Cellular automata: a discrete view of the world**. John Wiley & Sons, 2008.
- SILVA, A. T.; SALVINI, F.; CIANFARRA, P.; LOPES, M. R. F. HCA methodology applied to model the interaction of faulting and salt movement in Campos Basin, Brazilian Atlantic Margin. In: **11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society**, Salvador, BA: SBGf, 2009. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Paola\\_Cianfarra/publication/269050152\\_HCA\\_methodology\\_applied\\_to\\_model\\_the\\_interaction\\_of\\_faulting\\_and\\_salt\\_movement\\_in\\_Campos\\_Basin\\_Brazilian\\_Atlantic\\_Margin/links/551bc1a70cf2909047b9610d.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Paola_Cianfarra/publication/269050152_HCA_methodology_applied_to_model_the_interaction_of_faulting_and_salt_movement_in_Campos_Basin_Brazilian_Atlantic_Margin/links/551bc1a70cf2909047b9610d.pdf)>. Acesso em: 24 jul. 2016
- SLOTTA, D. J.; TATTING, B.; WATSON, L. T.; GÜRDAL, Z.; MISSOUM, S. Convergence analysis for cellular automata applied to truss design. **Engineering Computations**, v. 19, n. 8, p. 953-969, 2002. <http://dx.doi.org/10.1108/02644400210450369>.
- STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications**. 4<sup>th</sup> edition. CENGAGE Learning, 2006.
- SUZUDO, T. Spatial pattern formation in asynchronous cellular automata with mass conservation. **Physica A**, v. 343, p. 185-200, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.067>. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(04\)00857-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(04)00857-X).
- TATTING, B.; GÜRDAL, Z. Cellular automata for design of two-dimensional continuum structures. In: **Proceedings of the 8th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization**, AIAA Paper 2000-4832, Long Beach, CA, 2000. <http://dx.doi.org/10.2514/6.2000-4832>.
- ULAM, S. Random processes and transformations. In: **Proceedings of the International Congress of Mathematics**, Cambridge, MA: AMS, v. 2, p. 264-275, 1952.
- VANDEWALLE, P.; KOVACEVIC, J.; VETTERLI, M. Reproducible research in signal processing. **IEEE Signal Processing Magazine**, vol. 26, n. 3, p. 37-47, 2009. <http://dx.doi.org/10.1109/MSP.2009.932122>.
- VON NEUMANN, J. **Theory of self-reproducing automata**. University of Illinois Press, 1966.
- WIENER, N.; ROSENBLUETH, A. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle. **Archivos del Instituto de Cardiología de México**, v. 16, n. 3, p. 205-265, 1946.
- WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. **Reviews of Modern Physics**, v. 55, n. 3, p. 601-644, 1983. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.55.601>.
- WOLFRAM, S. Cellular automata as models of complexity. **Nature**, vol. 311, n. 5985, p. 419-424, 1984. <http://dx.doi.org/10.1038/311419a0>.
- WOLFRAM, S. Cellular automaton fluids 1: basic theory. **Journal of Statistical Physics**, v. 45, n. 3-4, p. 471-526, 1986. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01021083>.
- WOLFRAM, S. **A new kind of science**. Wolfram Media, 2002.